



TITLE:

# 準凸関数に対するサンドイッチ定理とその適用例 (非線形解析学と凸解析学の研究)

AUTHOR(S):

鈴木, 聡; 黒岩, 大史

---

CITATION:

鈴木, 聡 ...[et al]. 準凸関数に対するサンドイッチ定理とその適用例 (非線形解析学と凸解析学の研究). 数理解析研究所講究録 2011, 1755: 182-187

ISSUE DATE:

2011-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171206>

RIGHT:

# 準凸関数に対するサンドイッチ定理とその適用例

島根大学大学院総合理工学研究科 鈴木 聡 (Satoshi Suzuki),  
島根大学総合理工学部 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)

## 概要

凸関数に対するサンドイッチ定理は, Fenchel 双対性と同値であるなど, 凸計画問題において非常に重要な役割をなす定理である. 我々は [8] において, 準凸関数に対するサンドイッチ定理を示し, それを用いて新しい Lagrange 型の双対定理を示した. 本論文では, 準凸関数に対するサンドイッチ定理を紹介し, 定理が適用できるような具体的な関数の組について考察する.

## 1 導入

凸計画問題におけるサンドイッチ定理とは次のような定理である;  $f, g$  をそれぞれ下半連続真凸関数であり  $f \geq -g$  が成り立つものとする, いくつかの仮定の下で,  $f \geq K \geq -g$  を満たすようなアフィン関数  $K$  が存在する. このサンドイッチ定理は Fenchel 双対性と同値であるなど, 凸計画問題において非常に重要な役割をなす定理である. ([1])

我々は, [8] において, 準凸関数に対するサンドイッチ定理を示した. すなわち,  $f, g$  をそれぞれ下半連続準凸関数であり  $f \geq -g$  が成り立つものとするとき,  $f \geq K \geq -g$  を満たすような準アフィン関数  $K$  が存在するための十分条件について考察した. さらに, そのサンドイッチ定理を用いて, 準凸計画問題に対する新しい双対定理とその最弱の制約想定について考察を行った.

本論文では, [8] におけるサンドイッチ定理を紹介し, 条件を満たすような具体的な関数の組について考察する.

## 2 準備

本論文を通じて,  $X$  は局所凸ハウスドルフ線形位相空間,  $X^*$  をその双対空間,  $f$  は  $X$  から  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$  への関数とする.  $f$  が準凸関数であるとは, 任意の  $x_1, x_2 \in X, \alpha \in (0, 1)$  に対して,

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

が成り立つときをいう. 次に, 任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  と  $\overline{\mathbb{R}}$  上の二項関係  $\diamond$  に対して関数  $f$  のレベル集合を次のように定義する:

$$L(f, \diamond, \alpha) = \{x \in X \mid f(x) \diamond \alpha\}.$$

このとき,  $f$  が準凸関数であることと, 任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して  $L(f, \leq, \alpha)$  が凸集合であることは同値である. また,  $f$  が準凹関数であるとは,  $-f$  が準凸関数であるときをいい, 関数  $f$  が準アフィン関数であるとは,  $f$  が準凸かつ準凹であるときをいう. 重要な事実として,  $f$  が下半連続準アフィン関数であることと,  $f = k \circ w$  となるような  $k \in Q$  および  $w \in X^*$  が存在することが同値であることが知られている. ここで,  $Q = \{h: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; \text{下半連続非減少}\}$  である. この事実は, 準アフィン関数とはある種の単調性を持った関数である, ということを示している. 次に, 準凸関数に関する次の定理を紹介する.

**定理 1.** [5]  $f$  が下半連続準凸関数であることと,  $f = \sup_{i \in I} k_i \circ w_i$  となるような  $I$ : 添字集合,  $\{k_i\}_{i \in I} \subset Q$  および  $\{w_i\}_{i \in I} \subset X^*$  が存在することは同値である.

定理 1 は, 下半連続準凸関数はある下半連続準アフィン関数の族の上限に等しいということを示している. このことは, 下半連続凸関数が, アフィン関数の上限に等しいということと非常に良く対応している. [6] において我々は, この定理を用いて準凸関数の生成集合を次のように定義した.

**定義 1.** [6]  $\{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subset Q \times X^*$  が準凸関数  $f$  の生成集合であるとは  $f = \sup_{i \in I} k_i \circ w_i$  が成り立つときをいう.

定理 1 より, 任意の下半連続準凸関数は少なくとも一つの生成集合を持つ. 中でも代表的な例として,  $f$  が下半連続真凸関数であるとき,  $\{(k_v, v) \mid v \in \text{dom } f^*, k_v(t) = t - f^*(v), \forall t \in \mathbb{R}\} \subset Q \times X^*$  は  $f$  の生成集合である. 実際, 任意の  $x \in X$  に対して,

$$f(x) = f^{**}(x) = \sup\{\langle v, x \rangle - f^*(v) \mid v \in \text{dom } f^*\} = \sup_{v \in \text{dom } f^*} k_v(\langle v, x \rangle),$$

が成り立つことよりわかる.

次に, 非減少関数に対する逆写像の拡張概念を紹介する. 次の関数  $h^{-1}$  を,  $h \in Q$  の hypo-epi-inverse という:

$$h^{-1}(a) = \inf\{b \in \mathbb{R} \mid a < h(b)\} = \sup\{b \in \mathbb{R} \mid h(b) \leq a\}.$$

$h$  が逆写像を持つ場合, 逆写像と hypo-epi-inverse は一致することが知られている ([5]). そこで本論文では  $h$  の hypo-epi-inverse を  $h^{-1}$  と書く.

$X$  の部分集合  $A$  が evenly convex であるとは,  $A$  がある開半空間の共通部分としてあらわされるときをいう. また, 関数  $f$  が evenly quasiconvex であるとは, 任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して  $L(f, \leq, \alpha)$  が evenly convex であるときをいい,  $f$  が evenly quasilinear であるとは,  $f$  が evenly quasiconvex かつ準凹関数であるときをいう. [5] において, Penot, Volle は evenly quasilinear 関数に対する次のような同値条件を示した.

**定理 2.** 次の二つの条件は同値である.

(i)  $f$ : evenly quasilinear,

(ii)  $f = k \circ w$  となるような  $k \in G$  および  $w \in X^*$  が存在する.

ここで  $G = \{h: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid h: \text{非減少関数}\}$  である.

### 3 サンドイッチ定理

次のような準凸関数の集合を考える.

$$\Xi(X) = \left\{ \sup_{i \in I} k_i \circ w_i \mid \{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subset G_{\mathbb{R}} \times X^*, \text{co}\{w_i \mid i \in I\} : \text{汎弱コンパクト} \right\}.$$

ただし,  $G_{\mathbb{R}} = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid h : \text{非減少関数}\}$  とする. この集合に属する具体的な関数として,  $f = \sup_{i \in I} k_i \circ w_i$ ,  $\{(k_i, w_i) \mid i \in I\} \subset G_{\mathbb{R}} \times X^*$  であり,

(1)  $I$  : 有限集合,

(2)  $I$  : コンパクト位相空間,  $\{w_i \mid i \in I\}$  : 凸集合,  $w_i : I$  上で汎弱連続,

の場合がある. また,  $X$  がノルム空間である場合, 適切な生成集合をとることにより, 任意の下に有界な準凸関数が  $\Xi(X)$  に属する.

[8] において, 我々は準凸関数に対する次のようなサンドイッチ定理を示した.

**定理 3.** [8]  $f, g$  を  $\Xi(X)$  に属するような真準凸関数とし,  $f = \sup_{i \in I} k_i \circ w_i$ ,  $g = \sup_{j \in J} h_j \circ u_j$ ,  $f$  は上半連続かつ  $f \geq -g$  とする. このとき,  $0 \notin B = \text{co} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{x - y \mid f(x) < \lambda, g(y) < -\lambda\}$  が成立するならば,  $f \geq K \geq -g$  となるような実数値 evenly quas affine 関数  $K$  が存在する.

定理 3 における条件

$$(1) \quad 0 \notin B = \text{co} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{x - y \mid f(x) < \lambda, g(y) < -\lambda\}$$

が, サンドイッチ定理が成り立つための十分条件である. ここからは, この条件 (1) が成り立つような具体的な関数の組について考察する.

**定理 4.**  $f$  を準凸関数,  $A \subset X$  を凸集合とし,  $\alpha = \inf_{x \in A} f(x) \in \mathbb{R}$  と仮定する. このとき,  $f$  と  $\delta_A - \alpha$  に対して条件 (1) が成立する.

定理 4 は [8] の Theorem 2 の証明内において示されている結果であり, 証明は省略する. この結果を用いて準凸計画問題に対する新しい双対定理を導いている.

**定理 5.**  $f, g$  をそれぞれ凸関数とし  $f \geq -g$  が成り立つとする. このとき,  $f$  と  $g$  に対して条件 (1) が成立する.

*Proof.*  $0 \in B$  と仮定すると,  $B$  の定義より,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$ ,  $x_1, \dots, x_m \in X$ ,  $y_1, \dots, y_m \in X$  が存在して,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \beta_i = 1, \\ 0 = \sum_{i=1}^m \beta_i (x_i - y_i), \\ f(x_i) < \lambda_i, g(y_i) < -\lambda_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \end{cases}$$

が成立する. ここで,  $x_0 = \sum_{i=1}^m \beta_i x_i$  とおくと,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq f(x_0) + g(x_0) \\
 &= f\left(\sum_{i=1}^m \beta_i x_i\right) + g\left(\sum_{i=1}^m \beta_i y_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^m \beta_i f(x_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i g(y_i) \\
 &< \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i + \sum_{i=1}^m \beta_i (-\lambda_i) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となり, 矛盾. よって条件 (1) が成立する.  $\square$

凸関数に対するサンドイッチ定理は,  $f, g$  が下半連続真凸関数でありさらにいくつかの条件が成り立つ場合にアフィン関数が存在する, というものであったが, 定理 5 により,  $f, g$  が凸関数であれば  $f \geq K \geq -g$  となるような準アフィン関数が存在する, ということが示される.

**定理 6.**  $X$  をノルム空間,  $y \in X$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma \geq \delta > 0$  とする. また, 任意の  $x \in X$  に対して  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \gamma \sqrt{\|x\|}, \\
 g(x) &= \delta \sqrt{\|x - y\|} - \beta.
 \end{aligned}$$

このとき,  $f \geq -g$  ならば,  $f$  と  $g$  に対して条件 (1) が成立する.

*Proof.*  $f, g$  の定義より,

$$f \geq -g \iff \delta \sqrt{\|y\|} \geq \beta$$

が成り立つ. 実際,  $f \geq -g$  ならば  $f(0) \geq -g(0)$  より,  $\delta \sqrt{\|y\|} \geq \beta$  は明らかである. 次に,  $\delta \sqrt{\|y\|} \geq \beta$  と仮定する. 任意の  $x \in X$  に対して  $\|y\| \leq \|x\| + \|y - x\|$  より,

$$\sqrt{\|y\|} \leq \sqrt{\|x\| + \|y - x\|} \leq \sqrt{\|x\|} + \sqrt{\|x - y\|}.$$

$\gamma \geq \delta > 0$  より,

$$\beta \leq \delta \sqrt{\|y\|} \leq \delta \sqrt{\|x\|} + \delta \sqrt{\|x - y\|} \leq \gamma \sqrt{\|x\|} + \delta \sqrt{\|x - y\|}.$$

一方,  $f, g, B$  の定義より,

$$B = \text{co} \bigcup_{\lambda \in (0, \beta)} \left( B\left(0, \frac{\lambda^2}{\gamma^2}\right) - B\left(y, \frac{(\beta - \lambda)^2}{\delta^2}\right) \right) = \text{co} \bigcup_{\lambda \in (0, \beta)} \left( B\left(-y, \frac{\lambda^2}{\gamma^2} + \frac{(\beta - \lambda)^2}{\delta^2}\right) \right).$$

ただし,  $B(z, r) = \{x \in X \mid \|z - x\| < r\}$  である.  $\frac{\lambda^2}{\gamma^2} + \frac{(\beta - \lambda)^2}{\delta^2}$  は  $\lambda$  に関する凸関数より,  $[0, \beta]$  における最大値は  $\lambda = 0$  または  $\beta$  のときのどちらかである. 今,  $\gamma \geq \delta$  より,  $\lambda = 0$  のとき最大値  $\frac{\beta^2}{\delta^2}$  をとる. よって,

$$\bigcup_{\lambda \in (0, \beta)} \left( B \left( -y, \frac{\lambda^2}{\gamma^2} + \frac{(\beta - \lambda)^2}{\delta^2} \right) \right) = B \left( -y, \frac{\beta^2}{\delta^2} \right),$$

であり,  $B \left( -y, \frac{\beta^2}{\delta^2} \right)$  は凸集合であるので,

$$B = B \left( -y, \frac{\beta^2}{\delta^2} \right).$$

以上のことから

$$\begin{aligned} f \geq -g &\iff \delta \sqrt{\|y\|} \geq \beta \\ &\iff \delta^2 \|y\| \geq \beta^2 \\ &\iff \|y\| \geq \frac{\beta^2}{\delta^2} \\ &\iff 0 \notin B \left( -y, \frac{\beta^2}{\delta^2} \right) \\ &\iff 0 \notin B. \end{aligned}$$

□

定理 6 より, 凸関数ではないような準凸関数に対しても, 自然に条件 (1) が成り立つことが分かる.

## 参考文献

- [1] R. M. BORWEIN AND Q. J. ZHU, *Variational methods in convex analysis*, J. Global Optim. 35 (2006) 197–213.
- [2] M. A. GOBERNA, V. JEYAKUMAR AND M. A. LÓPEZ, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 1184–1194.
- [3] V. JEYAKUMAR, N. DINH AND G. M. LEE, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization*, Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathematics, University of New South Wales, 2004.
- [4] C. LI, K. F. NG AND T. K. PONG, *Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization*, SIAM J. Optim. 19 (2008) 163–187.

- [5] J. P. PENOT, AND M. VOLLE, *On quasi-convex duality*, Math. Oper. Res. 15 (1990) 597–625.
- [6] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming*, J. Optim. Theory Appl. in press.
- [7] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *Optimality conditions and the basic constraint qualification for quasiconvex programming*, Nonlinear Anal. in press.
- [8] S. SUZUKI AND D. KUROIWA, *Sandwich theorem for quasiconvex functions and its applications*, submitted.